

## Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23

### Blatt 12

---

#### Aufgabe 1 (5 Punkte):

Finden Sie ein Beispiel eines nicht-konvergierenden unendlichen Kettenbruches.

#### Aufgabe 2 (5 Punkte):

- (i) Bestimmen Sie die Näherungsbrüche von  $\frac{49}{30}$ .
- (ii) Berechnen Sie die Kettenbruchentwicklungen der reellen Zahlen  $2 + \sqrt{5}$ ,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  und  $\sqrt{8}$ .

#### Aufgabe 3 (5 Punkte):

Zeigen Sie, dass für die Näherungsbrüche  $\frac{c_k}{d_k}$  einer Kettenbruchentwicklung  $[q_0; q_1, q_2, \dots]$  die Gleichung  $\frac{c_k}{c_{k-1}} = [q_k; q_{k-1}, \dots, q_1, q_0]$  für alle  $k \geq 1$  gilt.

#### Aufgabe 4 (5 Punkte):

- (i) Sei  $\alpha$  eine reelle Zahl und sei  $d > 1$  eine ganze Zahl. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung, dass es ganze Zahlen  $m$  und  $n$  mit  $m$  gibt, welche  $0 < m < d$  und  $|m\alpha - n| \leq \frac{1}{d}$  erfüllen.
- (ii) Seien  $d, e, f$  und  $g$  positive ganze Zahlen, welche

$$2 \leq d, e \leq f < de$$

erfüllen. Folgern Sie aus Aufgabenteil (i), dass wenn  $f > 1$  ist und  $g$  teilerfremd zu  $f$  ist, ganze Zahlen  $m$  und  $m'$  mit

$$0 < m < d, 0 < m' < e \quad \text{und} \quad m' = \pm gm \pmod{f}$$

existieren.